

# 図形の高さの概念形成における「高さ比べ」の意義

— 「塵劫記」及び算数科教科書の「高さ」の比較考察から —

近藤 毅

広島都市学園大学 子ども教育学部

## 要 旨

現行の学習指導要領（平成29年告示）では、第5学年の「図形」領域の求積を学ぶ際に「高さ」が数学的に定義される。それは、日常語としての「高さ」とは大きく異なる捉え直しとなる。求積における高さの捉え違いによる誤答は国の学力調査において取り上げられており、いくつかの先行研究において指摘されているところである。しかしながら、その実態の十分な改善には至っていない。そこで、本研究では「塵劫記」及び教科書の「高さ」の取扱について考察し、その結果及び先行研究の知見を借りながら児童の高さの認識の実態を踏まえた指導方法として「高さ比べ」を取り入れた学習指導を提案する。

キーワード：高さ、平行、垂直、求積、誤答、高さ比べ、測定、教科書、塵劫記

## はじめに

現行の学習指導要領（文部科学省，2018a）のもとでは、小学校第2学年の「測定」領域で長さという量について学習する。ここでは、児童は日常語の「高さ」の認識で学習を進めるが、第5学年で初めて数学用語としての「高さ」の捉え直しをしなければならなくなる。しかも、その際の「高さ」の定義は平行四辺形、三角形、台形と図形ごとに異なったまま、それぞれの面積公式に位置づいていく。そのため、児童の図形の計量における高さの認識は誤認識も含めて多岐にわたることになり、求積における誤答要因となっている。たとえば、高さが図形の外部にある鈍角三角形の求積において、高さを底辺以外の辺の長さとする場合などである。こうした求積の誤答要因となる高さの認識については高垣（2001a）や辻（2017）らによっても指摘されているところである。しかしながら、その実態の十分な改善には至っていないのが現状である。

そこで、本研究では、江戸時代初期（1627年）に出版され、類書も含めると明治期まで刊行された和算書「塵劫記」を取り上げ、その時代の高さの概念を探る。さらに、その「高さ」と算数科教科書の「高さ」との比較考察の結果と児童の高さの認識実態を踏まえた高さの概念形成に資する指導方法として「高さ比べ」を取り入れた学習指導を提案する。

## 1 和算書「塵劫記」に見る「高さ」

塵劫記の著者は和算家吉田光由（1598-1672）である。大矢真一（1978，pp.28-30）は、

塵劫記は「生活と数学が融合」しており、「問題を解いて行く間に、ひとりでの数学的考え方が養成される数学書」と述べている。また、藤原松三郎（2007, p.51）は、江戸時代のあらゆる階級に浸透し大衆教育に大きな影響を及ぼした数学入門書と述べている。

平成24年度全国学力・学習状況調査（中学3年生対象）の数学Bの問題にその「塵劫記」（図1）が掲載されている。この設問は、木の高さを求めさせるものである。注目したいのは、この「塵劫記」の記載内容である。（図2は、図1の文字部分の拡大図）



図1

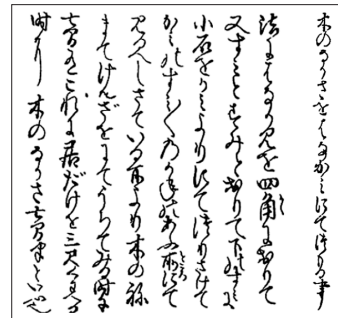


図2

「木のなかさをはなかみにてつもる事」と、木の「たかさ」ではなく「なかさ」と書かれている点である。「つもる」は「見積もる」の「つもる」であるから「木の長さを鼻紙で見当をつける」という意味になる。

右の図3の方は、寛永二十年版を底本とした「塵劫記」（1977, p.194）のものである。そこにも、「たち木の長をつもる事」とあり、次のように書かれている。

「これは、そまなどはかくのごとく、うちまたより木のすゑを見申候て、さて、それより木の本まで打ちて、ながさをいう也。」

図1・図3の木はともに地面と鉛直方向に立っており、高さではなく「ながさ」としている。「そま」とは、木を切り倒したり運び出したり造材したりすることを職業とする杣人の称で図の人物を指している。図3のような姿勢で股の間から木の先端がみえる位置であれば、そこから木までが木の長さと同じになるというものである。この姿勢の場合、上半身と下半身が同じ長さとして、腰を直角に曲げると図4のように直角二等辺三角形ができる。さらに木の先端と目の位置を結ぶと大きな直角二等辺三角形ができることから、目の位置から木までの距離が木の長さに等しくなるということである。



図3

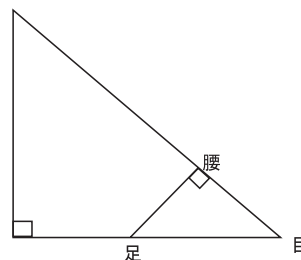


図4

る。図1・図3の<sup>そまびと</sup>杣人たちは木を登ることなくその「ながさ」を見積もっていたのである。

しかし、ここに「ながさ」とあるのはなぜだろうか。塵劫記（1977, p.116）の長方形の挿絵には縦方向に「長さ」、横方向に「ひろさ」と書かれており、同書（1977, p.129）の大矢真一の注釈には、「ひろさ」は「はば」の意とある。そうであれば、縦方向を「長さ」というのかと思える。しかし、伊藤隆（2009, p.10）の研究では、塵劫記等の和算の時期には「縦は長い辺、横は短い辺を表している」と結論づけている。したがって、この時期は鉛直方向が必ずしも縦ではないということになる。

そこで、木の「ながさ」とした点についてであるが、それは、<sup>そまびと</sup>杣人の生業が立木の伐採だけでなく丸太の形にしていって作業である造材をも担っていたからではないだろうか。造材においては、木の高さというより、その長さが木材の価値において意味を持つからである。では、塵劫記においてどのような事象で「高さ」を用いているのか。たとえば、「第十三 蔵に俵の入るつもの事」（同書、1977, p.69）の挿絵（図5）には、屋根の棟に

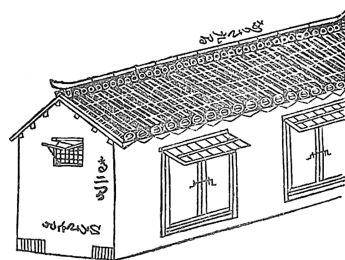


図5

「ながさ九間」、左壁面の横方向に「ひろさ七間」、縦方向に「高二間」と書かれている。この蔵に入る俵の数を見積もるうえで蔵を直方体と見て、「ひろさ」を「はば」の意で、「ながさ」は「長辺」の意で用いている。図の蔵の底面は長方形であり「縦は長い辺、横は短い辺」という伊藤隆（2009）の主張と一致している。また、伊藤（2009, pp.5-12）は、国定教科書制度の確立（1903年）に伴い、ながさ、ひろさにかわって和算における縦横ではない現在の「たて」と「よこ」が採用されたと述べている。この研究で興味深い点は、海外の英語圏の多くの国においても、長方形の縦に「length」、横に「width」の語を用いて長方形の縦、横を長辺、短辺で捉えているという点である。だから、この長方形の縦の辺の属性には鉛直性はない。

しかしながら、塵劫記においては、木においても、蔵においても、その図の「たかさ」は重力の方向である鉛直方向（縦方向）に描かれていることに留意したい。なぜなら、この点は中学年までの算数教科書（文部科学省検定済令和2年度版）全6社においても同様だからである。すなわち、高さが定義されるまで、教科書に掲載された図や写真での「高さ」は暗黙裡に鉛直方向（縦方向）になるように掲載されているのである。ところが、第5学年の「高さ」の定義とともに、鉛直方向ではない高さが登場してくることになる。

## 2 図形の「高さ」とは何か

### (1) 方向性をもつ量としての「高さ」

ここで改めて「高さ」について整理しておくことにする。高さという言葉は、状態や質を表す形容詞「高い」の転成名詞である。「数学小辞典」（1997, pp.349-350）では、高さとは、「三角形の頂点からその対辺へ引いた垂線の長さのこと。また、平行四辺形の1組の

平行な辺の間の距離のこと。」とある。高さの定義が図形によって異なっている。

一方、ものの位置を表すには、2次元では縦と横の要素、3次元では横、縦、高さの三つの要素が必要であり、これらの要素は、方向性を持っている。したがって、辺も、高さもその属性に長さという量を有するが、高さは一義的に図形の構成要素ではなく図形の属性であり、方向性をもつ量だということである。この点が、高さと同図形の構成要素である辺との決定的な違いである。しかしながら、高さを方向性のない図形の構成要素と同一視していたり、高さの方向を鉛直方向のみに捉えていたりする児童の実態がある。

## (2) 教科書における図形の「高さ」の定義

そこで、授業の主たる教材である教科書においてどのように「高さ」が定義されているかを概観する。表1は第5学年算数科用教科書（文部科学省検定済令和2年度版）全6社における「高さ」の定義をその記述に即して表にまとめたものである。同表の「共通概念」は、各図形の「高さ」の定義に共通する数学的概念である。なお、発行者名はA～Fと記号化した。また、定義の説明には図があるがここでは省略した。（下線は稿者による。）

表1 第5学年算数科用教科書における「高さ」の定義

発行者	平行四辺形	三角形	台形
A	右の平行四辺形で、辺BCを底辺としたとき、その底辺に垂直な直線ECなどの長さを、高さといひます。	右の三角形で、辺BCを底辺としたとき、その底辺に垂直な直線ADの長さを、高さといひます。	右の台形で、平行な2つの辺AD、辺BCを上底、下底といひます。 上底と下底に垂直な直線AJの長さを高さといひます。直線GH、KL、MCなどの長さも高さです。
B	平行四辺形で、1つの辺を底辺としたとき、底辺に、底辺に向かい合った辺に垂直にひいた直線の長さを高さといひます。	右の三角形で、辺BCを底辺としたとき、頂点Aから底辺に垂直にひいた直線ADの長さを高さといひます。	台形で、平行な2つの辺の一方を上底、他方を下底といひ、上底と下底に垂直にひいた直線の長さを高さといひます。
C	右の平行四辺形で、辺BCを底辺としたとき、底辺BCに垂直に引いた直線AG、EFなどの長さを、底辺BCに対する高さといひます。	右の三角形で、辺BCを底辺としたとき、辺BCに向かい合った頂点Aから辺BCに垂直に引いた直線ADの長さを、底辺BCに対する高さといひます。	台形の平行な2つの辺を、上底、下底といひ、その間の長さを高さといひます。
D	平行四辺形では、1つの辺を底辺とするとき、底辺とそれに平行な辺との間に垂直にかいた直線の長さを高さといひます。	三角形では、1つの辺を底辺とするとき、それに向かい合った頂点から底辺に垂直にかいた直線の長さを高さといひます。	台形では、平行な2つの辺を、それぞれ上底、下底といひ、上底と下底の間に垂直にかいた直線の長さを高さといひます。
E	平行四辺形の1つの辺を底辺とするとき、その底辺とこれに平行な辺との間のはげを高さといひます。	三角形ABCで、辺BCを底辺とするとき、頂点Aから底辺BCに垂直にひいた直線の長さを高さといひます。	台形の平行な2つの辺を上底、下底、その間のはげを高さといひます。
F	平行四辺形では、1つの辺を底辺とするとき、その辺と、それに平行な辺との間の垂直な直線の長さを高さといひます。	三角形では、1つの辺を底辺とするとき、それに向かいあった頂点から底辺に垂直にひいた直線の長さを高さといひます。	台形では、平行な2つの辺の一方を上底、もう一方を下底といひます。また、上底と下底との間の垂直な直線の長さを高さといひます。
共通概念	平行線の距離（垂線の長さ）	垂線の長さ	平行線の距離（垂線の長さ）

※発行者Eは、図形の定義・求積の指導順が三角形、平行四辺形、台形の順になっているが、他は、平行四辺形、三角形、台形の順となっている。

### (3) 教科書の「高さ」の定義の意味がわかるということ

表1に基づき高さの認識のための条件を考察する。高さの定義の表現に「底辺に垂直にひいた(かいた)」というのがある。児童の理解しやすさへの配慮から高さが図形内部にある図形において定義されているが、高さが図形の外部にある場合に「直線は底辺にひけない。かけない」と思う児童はいないだろうか。この高さの定義がわかるには、垂直とは位置関係を表す用語だから底辺と交わらなくても底辺と垂直な位置にある直線はかけるといふことと、その直線は底辺の延長線上におろせばよいという知識が必要である。

また、表1の高さの定義のほとんどに共通する点がある。図形の高さという量は見えないうえに、その可視化のための直線(垂線)を特定しようとしている点である。そこで、表1の「共通概念」から高さを認識するための条件が見いだされる。それは、平行な2直線間の幅(平行線の距離)と「垂線の長さ」の認知である。そのために、平行関係にある直線と垂直関係にある直線を図形の構成要素に関連付けてイメージすることが必要となる。

たとえば、平行四辺形及び台形における「高さ」の認識過程は次のように考えられる。

#### 【図形の「高さ」の認識過程の例】

- ① 図形の1つの辺(底辺)と平行な関係にある辺を認知する。
- ② 認知した平行な2つの辺をそれぞれ延長した直線をイメージする。
- ③ 図形の1つの頂点を通して、②の平行線と直交する直線(垂線)をイメージする。
- ④ ③の交点間の距離(線分の長さ)が平行線の幅(平行線の距離)であり、「垂線の長さ」であることがわかる。
- ⑤ ④の平行線の幅と図形の高さとの相等関係の理解のもとに、図形の高さを認識できる。

※三角形の場合は、①が「1つの辺(底辺)とその辺外の頂点を通る平行線をイメージする。」になる。

上記の認識過程は、まず平行関係の認知から始まるため、日常語の「高さ」にみられた鉛直性の影響をうけにくい。なぜなら、ここでの高さの問題は、認知された平行線とその垂線が生み出す2次元直交座標系の軸と平行線との距離の問題になるからである。

以上のことから、第4学年の「平行や垂直」の学習は、図形の「高さ」の概念形成に関連づけることが重要だということがわかる。そこで、⑤の「平行線の幅が図形の高さ」につながり、それが④の「平行線と直交する線分の長さ」につながる素地的学習が求められるというわけである。それが本研究における「高さ比べ」なのである。

## 3 児童の「高さ」の概念と算数科学年別指導内容

先行研究における児童の「高さ」の概念の実態はどうであろうか。水平な地面に対して鉛直に立っている木が描かれた図を傾けて提示しても、木の高さと長さは一致する。しかし、地面に対して木が傾いて立っている場合は、木の高さと木の長さは異なる。もし、木は水平な地面に対して鉛直方向にまっすぐに立つものとの認識を強くもつ児童の中には、「この木の高さは？」と問われれば、その木がたとえ斜めに傾いていても本来の木の高さ



は、その幹の長さだと回答をする可能性がある。高垣（1999；2000）は、こうした日常経験の中で構成された児童なりの高さの概念を規定している要因を類別し、それが多くみられた学年を報告している。表2は、それらを整理して現行の学習指導要領の学年別指導内容を稿者が照応させた表である。高垣は、表中の「平行型」と「ベクトル型」を算数科における正しい高さの概念としている。このカテゴリーは旧学習指導要領（平成元年）のもとでの研究結果ではあるが、「高さ」に関連しては算数科の学年別指導内容（文部省，1989，pp.38-52）は現行のものと大きく変わってはいない。したがって、現行の学習指導要領のもとであっても同様の結果となることが十分考えられる。また、高垣は次の2点を結論づけている。

- ① 児童が保持している日常経験から得た高さの概念は「数学的な高さ」の概念とは異なること、さらに、両者を関連付けて考える傾向があること。
- ② 表2のカテゴリーA～Dに共通することは、対象の外に高さを取ることを想定していないということ。（高垣，1999）

これらの結論から次のことが考えられる。まず、表1からもわかるように高さの概念は、長さという量と方向性（垂直性）を有するがゆえに、高さの測定の過程と、平行・垂直という位置関係に着目した計量的考察の過程を通して形成されていくものである。現行の学習指導要領では、測定のプロセスを充実する下学年での「C測定」領域と、計量的考察を含む図形領域としての上学年の「B図形」に編成（文部科学省，2018b，p.39）されている。しかし、下学年の教科書は「高さ」に関する限り測定のプロセスは充実してはいない。

そのため、図形の属性である量（長さ）としての高さが十分認識されないまま上学年での高さの定義を受け入れることになる。たとえば平行四辺形の求積の際、等積変形により既習の長方形に帰着させると、平行四辺形の高さが長方形の縦の長さになる。この高さである縦の長さで平行四辺形の辺の長さの混同が表2のカテゴリーDにつながっていく。つ

表2 「高さ」の概念の分類と学年別指導内容

カテゴリー	カテゴリーの分類基準	多く見られた学年	B 図 形		C 測 定
			指導 学年	指導内容	指導内容
A	高位置型 高さは高い所のある一点を示すと考える。	1年	1	図形についての理解の基礎（形とその特徴、構成、分解など）	量と測定の理解の基礎（量の大きさの直接比較、間接比較、任意単位を用いた大きさの比べ方）
B	たて型 対象を垂直方向に移動させて高さを考える。	1・2年	2	三角形や四角形などの図形（正方形、長方形、箱の形など）	長さ、かさの単位と測定（およその見当など）
C	中心型 高さは対象の中心を通ると考える。	2・3年	3	二等辺三角形、正三角形などの図形（角、円、球など）	長さ、重さの単位と測定（メートル法など）
D	辺依存型 高さは全長であると考え、高さで長さを混同している。	3・4年	4	平行四辺形、ひし形、台形などの平面図形（直線の平行や垂直など） 立方体、直方体などの立体図形（平面の平行や垂直、見取図、展開図など） ものの位置の表し方、正方形や長方形の面積、角の大きさ	
E	平行型 基準線と頂点を通る平行線間の最短距離を高さと考える。		5	平面図形の性質（合同、多角形など） 立体図形の性質（角柱や円柱） 平面図形の面積（三角形、平行四辺形、ひし形、台形） 高さ 立体図形の体積（立方体、直方体）	
F	ベクトル型 高さは頂点から基準線に垂線をおろすようなベクトル（大きさで方向性をもった量）で表わされる。		6	縮図や拡大図、対称な図形 概形とおよその面積 角柱、円柱の体積	

まり、平行四辺形の求積において底辺の長さとその隣の辺の長さをかけてしまうということである。

また、「高さは基準線からの垂直方向で示される」（高垣，2000）という点からも、高さは一義的に図形の構成要素ではなく平行・垂直の関係から見いだされる量である。したがって、高さを図形の構成要素の位置関係に関連付けて捉えない限り、図形の外部にある高さという量は認知できないのである。

## 4 イメージの座標変換と図形の「高さ」

### 【長方形の縦横の判断】

縦と横は対義語である。「数学小辞典」（1997，p.353，p.591）では、横長の長方形の図を示して、縦とは「鉛直な辺、またはその長さのこと」、横とは「水平な辺またはその長さのこと」とある。よって、縦、横の長さはこの定義によれば、鉛直方向の縦の辺の長さ、水平方向の横の辺の長さとなる。教科書ではそれらが簡略化されている。長方形の縦横の判断は、塵劫記では、辺の長さの長短が判断基準であった。これに対して、縦と横の定義に従えば鉛直、水平という方向性が判断基準となる。したがって、たとえば長方形が1つの頂点を下にして傾いているように提示された場合、辺が鉛直方向、水平方向でないためにこの定義からでは子どもは縦横を判断し兼ねるであろう。この判断のためには、子どもは傾いている辺が、鉛直軸、水平軸に位置するようイメージの座標変換をするか、そのように図形の方を直接回転させることになる。

### 【板書からノートへの座標変換が意味するもの】

子ども自身の座標系のイメージの変換は授業において自然に起こっている。例えば、多くの場合、黒板に教科書のとおり長方形を描くと、その図形は子どもにとって地面という水平方向に横が認知され、鉛直方向に縦が認知される。しかし、その板書を写した机上のノートの長方形においては、横は板書と同様に水平方向にあるものの、縦は鉛直方向ではなくノートの長方形の横と直角をなす方向（前後方向）なのである。また、板書の三角形の底辺と高さにおいても同様に、ノートにおける底辺は水平方向のままであるが、高さは底辺と直角をなす方向（前後方向）となる。子どもが板書された図形をノートに写すという行為は、イメージの座標変換を行っていることになる。時折、授業でノートを机上に立てて板書の図形と見比べていたり、スケッチした画用紙を立てて風景と見比べていたりする子どもを見かけるが、その行為は子どもなりの座標変換の結果と、もとの鉛直、水平という座標系との一致確認を簡便的に行っている行為なのである。このようにして、鉛直方向と平面図形の縦方向と高さの結びつきが強くなっていくのである。

### 【基準線と高さの相対的關係性】

長方形において縦が決まれば横が決まるように、基準となる直線（辺）が決まれば高さが決まる。両者は相対的に決定される概念である。この点について、高垣（2001b，p.257）は「高さの方向性というものは、本来、図形自体に固定的にそなわったものではない。そ

れゆえ、基準線と高さの2つの相対的關係から生ずる1つの關係系であることを認知させることが重要である」と述べている。ただしこの場合、先に基準となる直線の決定があって高さが決まるという順序性がある。高さの認知には、まず基準線の認知が必要なのである。しかし、次の5で述べるが、このことは子どもにとっては難しいことなのである。

**【鉛直・水平の世界から平行・垂直の世界へ】**

鈴木正彦（2010, p.106）は、「子どもの空間認識は、鉛直・水平の世界から、平行・垂直の世界へと変化し、見取図的世界（アフィン空間）へと質を変え、そうして遠近法へと発展する」と述べており、第2学年は「鉛直・水平で空間を律する捉え方が強く反映している」としている。よって、第2学年での高さの量の認識は、鉛直・水平の座標系で捉えさせていくことが子どもの認識の発達に沿っているといえる。鈴木という「鉛直・水平の世界から、平行・垂直の世界へと変化」とは、座標変換への変化である。そして、この切り替わりの学年が第4学年だと述べていることから、図形の鉛直方向ではない高さの指導は、下学年には適さないといえる。したがって、表2のとおり求積での高さの定義が第5学年であることを踏まえると、第4学年での「平行や垂直」の学習において図形の高さに係るイメージの座標変換をどのように関連付けるかが重要になる。そこで、図形の外部に高さがある場合で基準線の認知と座標変換に関連する子どもの実態を次に見ることとする。

**5 平面図形の「高さ」の認知に寄与するものとは何か**

**(1) 「高さ」に関する国の調査結果**

**【底辺が水平で高さが外部にある三角形の場合】**

国立教育政策研究所（2012）が平成19～22年度の4年間の全国学力・学習状況調査結果を分析し、成果及び課題をまとめている。その中で算数科の課題として次の「三角形の面積」の問題を取り上げている。図6は、平成21年度全国学力・学習状況調査（小学6年生対象）の算数Aの問題の図であり、この三角形の面積を求める式を答えさせるものである。

正答率は67.1%で、無解答率は7.9%である。

誤答については、「 $4 \times 6$ 」の反応率が8.2%と最も高く、「 $7 \times 6 \div 2$ 」の反応率が2.4%である。また、計算結果が12にならない「 $\bigcirc \times \square \div 2$ 」の形の式の反応率が5.2%であり、その中には、「 $4 \times \square \div 2$ 」や「 $\bigcirc \times 4 \div 2$ 」など4を用いた式を書いている解答があると報告している。

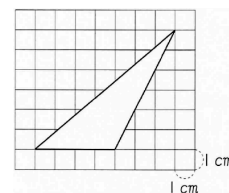


図6

誤答の「 $4 \times 6$ 」については、平行四辺形の面積の求め方「(底辺)  $\times$  (高さ)」との混同であるとし、「 $\bigcirc \times \square \div 2$ 」については、求積のための長さが読み取れていないと説明している。ここで誤答の式で6を用いている点に着目したい。上記の説明と別な解釈ができるからである。それは、2つの誤答の式の反応率を合わせると10.6%、これに正答の反応率を加えると、77.7%の児童がこの三角形の高さを読み取れている、ということである。



**【底辺が水平ではなく高さが外部にある三角形の場合】**

図7は、平成24年度全国学力・学習状況調査（小学6年生対象）の算数Aの三角形の底辺と高さの関係の理解をみる問題の図である。示された底辺に対応する高さを図から読み取ることを求めている。④が正答で正答率は54.9%、無解答率は1.1%である。

誤答の反応率の高い順に表2のカテゴリーと併記すると、② (24.1%) [C], ① (11.3%) [A], ③ (7.5%) [D] となっている。

②では、高さは図形の内部にあるものと見ている。

①では、高さは鉛直方向にあるものと見ている。

③では、高さを図形の辺の長さとして見ている。

また、②、③は高さを図形外部に取ることを想定していない。

底辺が水平に位置するような座標変換の見方ができれば正答率は高まる可能性がある<sup>1)</sup>。しかし、上記の誤答の見方から離れない児童にとってそれは困難である。

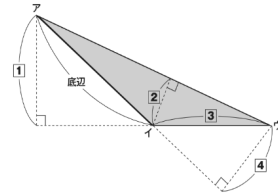


図7

**(2) 平面図形の「高さ」の認知に寄与するもの**

高さの読み取りに限定して上記の結果を比較すれば、図6の問題の方の正答率が22.8ポイント高い。したがって、図6のように高さが図形の外部にある鈍角三角形を方眼上に配置すれば、8割近くの児童が高さを正しく読み取れるということである。それは、方眼の線が底辺と平行な頂点を通る直線を認知しやすくし、その直線と垂直関係にある直線の長さを認知しやすくしているからである。ここでの平行関係の認知は、同時に基準線の決定を伴っている。一方、図7は、こうした平行・垂直の関係の直線が認知しにくい図である。

以上のことから、図形の構成要素（辺や点）を含む平行線とその垂直方向の長さである幅（平行線の距離）の認知が、図形の高さの認知に寄与するということが示唆される。

なお、図6の図形は底辺と垂直の方向に高さが見いだされるように配置されていることから図7の場合のように座標変換の必要はない。また、方眼の格子点に三角形の3つの頂点が位置づく配置により測定しやすくなっている。したがって、向きや大きさの異なる図形に対しては同一の方眼での対応は難しいということになる。そこで、前述したように図形の構成要素を含む平行線とその垂直方向の幅の認知を助け、高さの測定に即応できる教材教具とその指導方法が求められるというわけである。次はこの点についての提案を行う。

**6 図形の「高さ比べ」の意義と学習段階**

これまでの考察から第5学年の高さの定義を理解する上での課題は次の2点である。

- |   |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>① 日常語の「高さ」がもつ鉛直性に影響されることなく高さを認知できること。</li> <li>② 図形の外部にも「高さ」を認知できること。</li> </ul> |
|---|

これらの課題解決を促して数学的「高さ」の概念形成に資することが「高さ比べ」の意義である。この「高さ比べ」は次の4段階のプロセスからなる。

**【第1段階】 合同な図形の高さ比べにおける直観的大小判断**

(例) 図8のように、色々な形の積み木等を「いちばん高くなるように置きましょう。また、いちばんひくくなるように置きましょう」という問題で合同な図形で高さの大小判断をする。また、その時の底辺の長さにも着目する。ここで「置く」という行為は、高さの基準線(底辺)を決定し、比較のために基準線をそろえる行為を同時に行っているということである。



図8 「どの辺を下にするといちばん高くなるかな」

**【第2段階】 高さが同じになる図形の高さ比べにおける直接比較と高さ探し**

(例) 置き方によって高さが同じになる異なる図形を、直接比較で大小判断し、高さを見つける。たとえば、図9の右端の図のように重なった場合、どこの長さが高さかを考える。

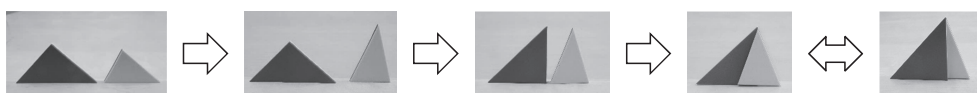


図9 「高さは、どこの長さかな」

**【第3段階】 高さが異なる図形の高さ比べにおける間接比較と高さ探し**

(例) 図10のような色々な図形のうち、「どの形が積み木の門(ゲート)を通れるかな」という問題で、門の高さと図形の高さを比較するうえでどの長さを測るとよいかを考える。その際、図11のような手作りツール<sup>2)</sup>を用いる。このツールは市販の物差しと三角定規を厚紙で挟んで竹ひごとともに可動するようにセロテープで止めたものである。このツールによる高さと門や図形の高さとの相等

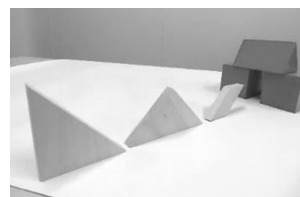


図10 「ゲートは通れる？」

関係の確認後、紙テープ等で測定箇所を間接比較して結果を予想する。次に机上を滑らせながらどの図形が門を通るかを実際に確かめる。最後に、結果をもとに測定の過程を振り返り、それぞれの図形の高さの測定箇所を確認し、測定に用いた紙テープ等を各図形に対応づける。

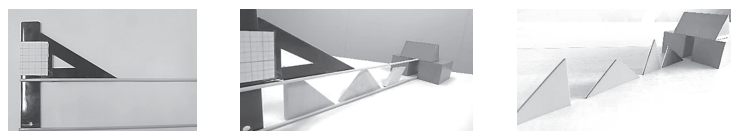


図11 「高さを見つけて、どの形がゲートを通れるかを予想しよう」

**【第4段階】平面図形の高さ比べにおける普遍単位測定と高さ探し**

この段階は水平・鉛直の世界から平行・垂直の世界への橋渡しの段階になる。まず、図12のように図形の底辺を変えて高さを探す。その際、点線や矢印の箇所等と「2本の竹ひごの幅を示すツールの物差し」の長さとの異同を定規で確認する。この確認は、第4学年の「平行や垂直」の学習において「平行線（2本の竹ひご）とその幅を示す物差しの垂直関係」の理解や、身長計からノギスへの測定方法への変化のように、高さの鉛直性から垂直性への変化（イメージの座標変換への変化）の理解を円滑にする。図13のような「海底トンネルに入れる図形はどれかな」の問題であれば、傾いた図形の底辺に竹ひごを合わせると直観的な大小判断や普遍単位測定ができる。同様に図7のような平面図形にもこのツールでの対応が可能になる。

図14は、合同な図形を敷き詰めてできる図形の高さ比べである。図形の求積の公式化につながる。また、「敷き詰め模様」（文部科学省，2018b，p.55）の学習内容との関連も図りたい。

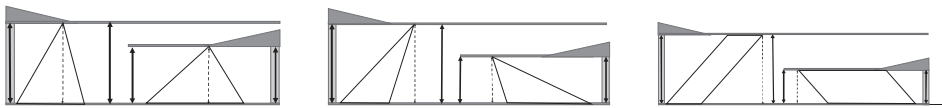


図12 「高さはどこにあるのかな」

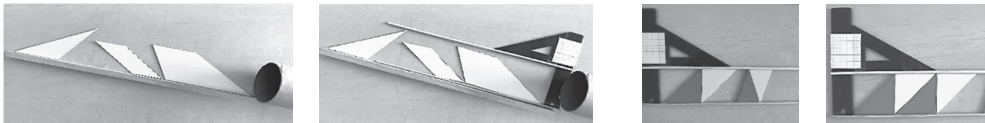


図13 「海底トンネルに入れる図形はどれかな」

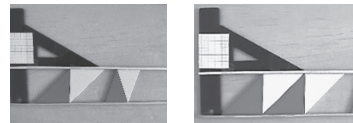


図14 「敷き詰めると」

**7 まとめと今後の課題**

本研究は、「塵劫記」と算数教科書の「高さ」の比較考察の結果及び子どもの実態から、「図形の構成要素（辺や点）を含む平行線とその垂直方向の長さである幅の認知が、図形の高さの認知に寄与する」という結論を導いた。次に、この結論をもとに「高さ比べ」の意義を明らかにし、「高さ比べ」を取り入れた4つの学習段階からなる指導方法の提案を行った。

今後は、授業実践を通して「高さ比べ」の教育的効果について検証したい。また、「高さ比べ」の各段階をプログラミング学習の観点からコンテンツ化し、「GeoGebra」<sup>3)</sup>等のツールと併用して児童一人一人がタブレット型端末で学ぶことは、高さの概念形成のみならず児童の空間認識において有効だと考えている。この点についても今後の研究課題としたい。

本研究では児童の高さの概念形成について論じてきたわけであるが、高さの概念形成は就学前から始まっている。幼稚園教育要領（平成29年告示）には、領域「環境」の内容に

「(9) 日常生活の中で数量や図形などに関心をもつ。」(文部科学省, 2017) がある。これについて, 幼稚園教育要領解説(文部科学省, 2018c) では, 「砂山が高いかを比べたりする」などの例を挙げて, 「量を比べたり, 様々な形を組み合わせ遊んだり, 積み木やボールなどの様々な立体に触れたりするなど, 多様な経験を積み重ねながら数量や図形などに関心をもつようにすることが大切である。」と説明されている。たとえば, キリン, トラ, ワニやアシカなどの動物を, 平行四辺形, 長方形, 三角形などの積み木の形と結び付ける活動からはじめて, 図形の動物たちが動物園のいろいろな高さの門をくぐってやってくる遊びはどうであろう。幼児はその遊びをどんな受け止めをするかについても興味をわいてきた。

### 【註】

- 1) 平成28年度の同調査では, 図7の底辺アイを水平に位置させた図で高さを選択させて, 正答率が82.1%に上昇している。
- 2) 「高さ比べ」における「手作りツール」は, 身長計とノギスの両方の測定方法のイメージを内包している。身長計の測定方法による「高さ」の数学的概念の納得性の効果については高垣(2001c)の研究報告がある。手作りツールの竹ひごは, 測定だけでなく図14の敷き詰め「三角形の内角の和」等における平行線の存在の必然性を与える。具体的には, 三角形の3つの内角が集まる頂点は平行線上の点であるということ。その理解は中学数学での平行線の性質による証明において三角形の頂点に平行線を引く必然性をもたらす。
- 3) 「GeoGebra」は, オーストリアの大学のMarkus Hohenwarter教授らによって開発されているもので, 数学や科学を小学校から大学まで学習指導するための幾何・代数・統計・解析を結び付けた動的な数学ソフトウェアである。作図ツールとして教材開発も可能である。(https://www.geogebra.org/?lang=ja) (2021.7.1閲覧)

### 【引用・参考文献】

- 文部科学省. (2018a). 小学校学習指導要領(平成29年告示). 東洋館出版社.
- 高垣マユミ. (2001a). 高さ概念における児童のもつプリコンセプションに関する研究. 科学教育研究24巻2号, 98-105.
- 辻宏子. (2017). 児童・生徒の「高さ」の理解に関する考察—平行四辺形の求積問題に関する横断的調査より—. 心理学紀要(明治学院大学), 27, 23-33.
- 大矢真一. (1978). 『塵劫記』と数学教育. 日本数学史学会「数学史研究」, 79号, 28-38.
- 藤原松三郎. (2007). 日本数学史要. 勉誠出版, p.51.
- 文部科学省・国立教育政策研究所. (2012). 平成24年度全国学力・学習状況調査【中学校】の調査問題「中学校第3学年数学B」. (https://www.nier.go.jp/12chousa/12mondai\_chuu\_suugaku\_b.pdf) (2021.6.1閲覧)
- 吉田光由, 大矢真一 校注. (1977). 『塵劫記』. 岩波文庫, 岩波書店 p.69, p.116, p.129, p.194.
- 伊藤 隆. (2009). 長方形の面積の公式における「縦×横」の変遷と多様性について. 群馬大学教育学部紀要, 自然科学編. 57, 5-14.
- 矢野健太郎 編. (1997). 数学小辞典. 共立出版. (※縦, 横の用語の説明は, 同書の2017年の第2版にはない.)
- 高垣マユミ. (1999). 図形概念の拡張に関わる子どもの日常的概念について—高さ概念の獲得過程に関する調査研究. 日本数学教育学会誌/81巻(1999) 8号 138-145.
- 高垣マユミ. (2000). 小学生は高さをどのようにとらえているのか: 「日常的経験から得た高さ」と「平

- 面図形における三角形の高さ」との関連. 発達心理学研究, 第11巻, 第2号, 112-121.
- 文部省. (1989). 小学校指導書算数編 (平成元年6月). 東洋館出版社, pp38-52.
- 文部科学省. (2018b). 小学校学習指導要領解説 (平成29年告示) 算数編. 日本文教出版, p.39, p.55.
- 高垣マユミ. (2001b). 小学生の平面図形における高さの概念と方向性の認知との関連 科学教育研究 25 (4), 252-259.
- 鈴木正彦. (2010). 第6章 図形: 黒田恭史編著 初等算数科教育法. ミネルバ書房, p.106.
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター. (2012). 全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて (小学校編). 教育出版pp.126-127, pp.131-135.
- 文部科学省・国立教育政策研究所. (2012). 平成24年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書, pp.198-205 ([https://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24\\_shou\\_houkokusyo\\_ikkatsu\\_2.pdf](https://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo_ikkatsu_2.pdf)) (2021.7.1閲覧)
- 高垣マユミ. (2001c). 高さのプリコンセプトを変容させる教授ストラテジーの研究. 教育心理学研究, 49, 274-284.
- 文部科学省. (2017). 幼稚園教育要領 (平成29年告示). フレーベル館. p.18.
- 文部科学省. (2018c). 幼稚園教育要領解説 (平成30年3月). フレーベル館. p.193.
- 植田三郎・上垣 渉. (1986). 中学校 しきつめの幾何—新しい図形指導. 国土社. pp.55-59.
- 谷津綱一. (2019). 親子で楽しむ和算の図鑑. 技術評論社. pp.158-159
- 平野年光. (2016). 和算 算額問題の教材化2—東山二十八峰・鳥辺山山中「妙見堂」奉納算額から— 東洋館出版社.
- 和算研究所・佐藤健一編. (2017). 和算百科. 丸善出版.
- 北原保雄編. (2004). 小学館全文全訳古語辞典. 小学館.
- 宮腰賢・桜井満編. (2003). 旺文社全訳古語辞典 [第二版]. 旺文社.
- 大野 晋・佐竹昭広 他編. (1995). 岩波古語辞典 補訂版. 岩波書店.