

# 子どもの誤答が示す算数科学習指導の改善の視点

— 外延量の測定におけるスキーマに焦点を当てて —

近 藤 毅

広島県安芸太田町立加計中学校

## 要 旨

本稿の目的は、算数科の図形と測定の問題解決においてどのような課題があるのかを、算数科の国際的な調査における誤答分析を行うことにより授業改善に資する視点を提示していくことである。そこで、スキーマの概念を手掛かりに子どもの誤答を考察した結果、図形における外延量の測定の問題解決に特に寄与する2つのスキーマを導いた。倍概念の考え方に立脚する測定スキーマと図形の量的関係の立式に関与する測定スキーマである。この2つのスキーマの協働及び形成が図形と測定の学習指導のメルクマールと考え、それらの協働及び形成を促す学習課題づくりの視点を提案する。

**キーワード：**スキーマ、誤答、測定、長方形、周りの長さ

## はじめに

子どものテストの回答を見ていたり、授業での課題解決における子どもの反応を見聞きすると、間違はずのなないと思っていた問題に対してとんでもない間違いをしていたりして、「どうしてこんな間違いをするのだろう」「『わかった』といていたあの子がこんな間違いをするなんて」と思うことがある。目の前の子どもの実態を見て自らの指導の仕方に何らかの課題があるのだろうと考える教師は成長の道を歩んでいける。しかし、具体的にその教師には何が必要なのだろうか、どうすればよいのだろうか。子どもが分かっているからできないのだと考えて、誤りを指摘して再度説明し、繰り返し練習させる。それでも、数か月後には堂々と同様な間違いをしてくる子どもに出会ってがっかりとさせられる。結局、以前の間違いに戻っているようなことがある。なぜ、そのようなことが起きるのか。

子どもが間違ににしても、正答するにしても、その子どもなりの論理がある。子どもが問題を読みその意味をとらえる際、これまでの経験や知識に依拠して問題の意味を理解しようとする。その意味の理解において依拠する知識構造によっては、結果は多様なものとなりうる。つまり、同じ間違いであっても、理解の異なる間違いであったり、たとえ正答であっても、問題の意味を取り違えて正答していたりするということである。

以上の事例は、間違いが生成するプロセスの解明が指導方法の改善に道を開くことを示唆する。子どもの誤答には、子ども理解と学習指導と教材解釈をつなぐ筋道が隠れている。本稿はこうした観点に立ってスキーマの概念を手掛かりに子どもの誤答を考察し、指導方法の改善に資する視点の提出を試みる。

## 1 スキーマによる誤答分析の意義

スキーマ (schema) とは、『社会心理学用語辞典』(1987, pp.109-110) では、「外界の情報を取り入れ、処理し、その情報に基づいて推論する際の枠組みとなる体制化された知識構造」とある。また『算数教育指導用語辞典』(2006, p.29) では、スキーマとシエマを同義語として「事柄を認知したり、外界にはたらきかけるときの土台をなす枠組みのこと」とある。「シエマ」は、ピアジェ (J. Piaget) が最初に用いた概念である。平林一榮 (1987, p.322) は、ピアジェのいう「シエマ」を「同化」と「順応」の概念に関連づけて次のように述べている。「われわれは、何にてもあれ、それを理解するには、一つのシエマをもって立ち向かう。それはピアジェのいう知的活動としての『同化』の側面である。ところが、その反面、そのシエマも対象に即して創られ、また活動の過程において修正もされる。それはまたピアジェのいう『順応』の側面である。」シエマの主要な機能として、スケンプ (1973, p.28) は、「既存の知識を統合すること」と「新しい知識を獲得する上での心的な用具となること」の2つを挙げている。また、ルーメルハート (Rumelhart, D.E) らは、スキーマ(シエマ)の特徴として次の4つを挙げている。(『社会心理学用語辞典』1987, p.110)

- 1) スキーマは変数をもっている。たとえば、「与える」というスキーマには「与え手」、「受け手」、「物」という3つの変数が含まれており、これらの変数には代表的な値が決まっている。したがって、入力された情報の中に欠けている変数がある場合には、活性化されたスキーマによってその値(デフォルト値)が補われる。
- 2) あるスキーマの中に他のスキーマが埋め込まれ、階層構造を形成している。
- 3) スキーマはさまざまな抽象度のレベルをもっている。
- 4) スキーマは事象の定義ではなく、典型例、標準例を表象している百科事典的な知識である。

算数・数学科の学習におけるシエマ(スキーマ)の機能に着目した平林(1987, p.345)は、子どものうちに「理解」をつくりだす具体的な方策の一つとして「子どもの現有するシエマを精査せよ」と述べている。問題の意味理解の際に依拠する現有の知識構造であるスキーマ(シエマ)は、理解を助ける一方で、取り違いや誤答などの多様な結果を生じさせる要因となるからである。したがって、子どもの誤答分析は、子どものスキーマを探ることであり、スキーマをつくる契機となった学習指導を探り授業改善に迫ることでもある。本稿の誤答分析の意義はここにある。次に算数科の国際的な調査における誤答分析をおこない、子どもが問題解決の際に、どのようなスキーマに依拠しているのかを探る。

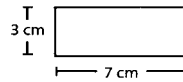
## 2 外延量の測定における誤答事例

### (1) TIMSS2007調査における長方形のまわりの長さ

IEA(国際教育到達度評価学会)が進めているTIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)と呼ばれる算数・数学及び理科の到達度に関する国際的な調査がある。この調査の目的は、「初等中等教育段階における児童・生徒の算数・数

学及び理科の教育到達度を国際的な尺度によって測定し、児童・生徒の学習環境条件等の諸要因との関係进行分析することである。TIMSS調査は1995年から4年ごとに実施しており、日本もこの調査に参加している。調査対象は小学校4年生と中学校2年生である。図1は、平成19（2007）年3月に実施され、平成20年12月にIEAが公表した調査（TIMSS2007）の問題のひとつである。

小学校4年算数問題  
内容領域：図形と測定， 認知的領域：応用すること



この長方形のまわりの長さは、次のどれですか。

- ① 7 cm
- ② 10cm
- ③ 20cm
- ④ 21cm

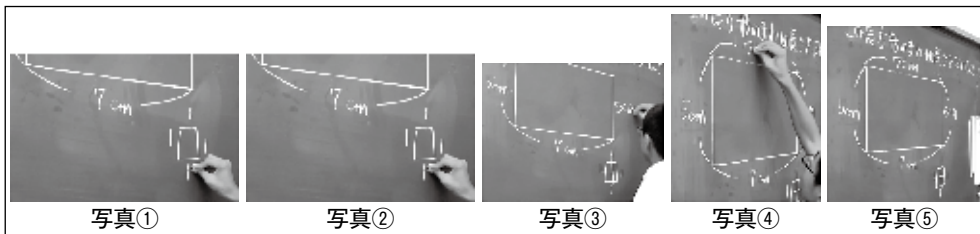
図1 TIMSS2007 の問題

小学校4年生対象のこの問題の正答率が、国際平均値51.2%に対して日本は33.7%であった。各反応率（%）は、「①2.5，②8.9，③33.7，④53.9，無答1.0」である。④が半数を超えている。「長方形のまわりの長さ」が問われているのに、誤答④の選択が多いのはなぜか。これについて、国立教育政策研究所（2009，p53）は当該調査（TIMSS2007）報告書に次のように報告している。

「長方形の周りの長さは小学校3年で履修しているが、TIMSS1995調査時にも、小学校4年になると長方形の面積を学習し、そのため長方形の面積と混同してしまいがちであるというわが国に特有の問題点がみられた。そこでこのようなわが国特有の問題点をTIMSS1995および2003の国内報告書でとりあげてきたが、今回のTIMSS2007においても同様に面積との混同が多く見られた。わが国は、54%もの児童が誤答である面積④を選んだが、この誤答を選んだ児童は国際的には13%しかない。」この「混同」の要因とは何であろうか。

## （2） 中学1年生A君にとっての長方形のまわりの長さ

まず、調査問題の②の選択理由から考えてみたい。下の資料1は、2018年7月20日（金）、中学1年の数学科の文字式の導入の授業で、図1の調査問題と類似した問題について、生徒A君が自分の考えを説明している写真である。



資料1 自分の考えを説明する生徒

指導者は写真①のように板書して、「この長方形のまわりの長さを求めなさい」と尋ねた。A君は、写真②のように正方形の図をかいて、その正方形の各辺に1と書きつけながら、「たとえば、1, 1, 1, 1の正方形だとしたら、この正方形はこことここはいっしょで、こことここはいっしょだから」と向かい合う辺が等しくなっていることを説明した後、「これも長方形だけど、ここが（5cmと書かれている辺の向かいの辺に5cmと写真③のようにかいて）、こことここはいっしょで、7cmは（7cmと書かれている辺の向かいの辺に7cmと写真④のようにかいて）向かい側のたてとよこが同じになります。これで終わります」といって、長方形の構成要素間の性質に基づき辺の長さを測定した。確認のため、「まわりの長さはこの図のどこですか」と尋ねると、長方形の4つの辺を指でぐるりとなどってみせた。A君は、長さの数値が書かれていない辺に数値を書きたして、長方形の周りのすべての辺に長さの数値が書かれている図を完成することをもって、周りの長さを求めたと考えたのである。

誤答②を選択した児童は8.7%である。この誤答は縦と横の数値の和と一致している。彼らも、A君のように長方形の周りにおいて未測定の本の長さを測定し、長方形の周りを構成するすべての辺に長さの測定値を与えた状態にすることで、周りの長さを求めた、と考えたのではないか。選択肢には横の長さと同じ①の7cmはあったが、縦の長さの数値がなかったため、それらの和である②の10cmを選択したのかもしれない。周りの長さの測定に係る知識構造は、意味理解のレベルの異なる層を有するスキーマといえる。

### 3 調査問題に関連する算数科の学習内容

先のTIMSS2007の調査報告書には、「長方形の周りの長さは小学校3年で履修」とある。そこで、調査実施時期における学習指導要領（平成10年）において、「長方形の周りの長さ」がどのように取り扱われているかを見る。

表1は、平成10年版及び平成20年版の学習指導要領における平面図形における構成要素、長さ及び面積に関連する学習内容を稿者が学年別・領域別に整理したものである。

表1 平成10年版及び平成20年版の学習指導要領における平面図形についての学習内容

	学習指導要領（平成20年）	学習指導要領（平成10年）
第1学年	量と測定 (1) 大きさを比較するなどの活動を通して、量とその測定についての理解の基礎となる経験を豊かにする。 ア 長さ、面積、体積を直接比べること。 イ 身の回りにあるものの大きさを単位として、その幾つかで大きさを比べること。	(1) ものの長さを比較することなどの活動を通して、量とその測定についての理解の基礎となる経験を豊かにする。 ア 長さを直接比べること。 イ 身近にあるものの長さを単位として、その幾つかで長さを比べること。
	図形 (1) 身の回りにあるものの形についての観察や構成などの活動を通して、図形についての理解の基礎となる経験を豊かにする。 ア ものの形を認めたり、形の特徴をとらえたりすること。 イ 前後、左右、上下など方向や位置に関する言葉を正しく用いて、ものの位置を言い表すこと。	(1) 身近な立体についての観察や構成などの活動を通して、図形についての理解の基礎となる経験を豊かにする。 ア ものの形を認めたり、形の特徴をとらえたりすること。 イ 前後、左右、上下などの方向や位置に関する言葉を正しく用いて、ものの位置を言い表すこと。
	算数的活動 ウ 身の回りにあるものの長さ、面積、体積を直接比べたり、他のものを用いて比べたりする活動 エ 身の回りから、いろいろな形を見付けたり、具体物を用いて形を作ったり分解したりする活動	
第2学年	量と測定 (1) 長さについて単位と測定の意味を理解し、長さの測定ができるようにする。 ア 長さの単位（ミリメートル（mm）、センチメートル（cm）、メートル（m））について知ること。	(1) 長さについて理解し、簡単な場合について、長さの測定ができるようにする。 ア 長さについて単位と測定の意味を理解すること。 イ 長さの単位（ミリメートル（mm）、センチメートル（cm）及びメートル（m））について知ること。

近藤 毅 子どもの誤答が示す算数科学習指導の改善の視点  
—外延量の測定におけるスキーマに焦点を当てて—

第2学年	図形	(1) ものの形についての観察や構成などの活動を通して、図形を構成する要素に着目し、図形について理解できるようにする。 ア 三角形、四角形について知ること。 イ 正方形、長方形、直角三角形について知ること。	(1) ものの形についての観察や構成などの活動を通して、図形についての理解の基礎となる経験を一層豊かにする。 ア いろいろな形を作ったり分けたりすること。 イ 三角形、四角形などについて知り、それらをかいたり作ったりすること。
	算数的活動	ウ 身の回りにあるものの長さや体積について、およその見当を付けたり、単位を用いて測定したりする活動 エ 正方形、長方形、直角三角形をかいたり、作ったり、それらで平面を敷き詰めたりする活動	
第3学年	量と測定	(1) 長さについての理解を深めるとともに、重さについて単位と測定の意味を理解し、重さの測定ができるようにする。 ア 長さの単位（キロメートル（km））について知ること。 イ 重さの単位（グラム（g）、キログラム（kg））について知ること。 (2) 長さや重さについて、およその見当を付けたり、目的に応じて単位や計器を適切に選んで測定したりできるようにする。	(1) 長さ、かさ、重さについて理解し、簡単な場合について、それらの測定ができるようにする。 ア 長さの単位（キロメートル（km））について知ること。
	図形	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、図形を構成する要素に着目し、図形について理解できるようにする。 ア 二等辺三角形、正三角形について知ること。 イ 角について知ること。 ウ 円、球について知ること。また、それらの中心、半径、直径について知ること。	(1) ものの形についての観察や構成などの活動を通して、基本的な図形について理解できるようにする。 ア 箱の形をしたものを観察したり作ったりすることを通して、図形を構成する要素について知ること。 イ 図形を構成する要素に着目して、正方形、長方形、直角三角形について知り、それらをかいたり、作ったり、平面上で敷き詰めたりすること。
	算数的活動	ウ 長さ、体積、重さのそれぞれについて単位の間隔を調べる活動 エ 二等辺三角形や正三角形を定規とコンパスを用いて作図する活動	
第4学年	量と測定	(1) 面積について単位と測定の意味を理解し、面積を計算によって求めることができるようにする。 ア 面積の単位（平方センチメートル（cm <sup>2</sup> ）、平方メートル（m <sup>2</sup> ）、平方キロメートル（km <sup>2</sup> ））について知ること。 イ 正方形及び長方形の面積の求め方を考えること。 (2) 角の大きさについて単位と測定の意味を理解し、角の大きさの測定ができるようにする。 ア 角の大きさを回転の大きさとしてとらえること。 イ 角の大きさの単位（度（°））について知ること。	(1) 面積の意味について理解し、簡単な場合について、面積を求めることができるようにする。 ア 面積について単位と測定の意味を理解すること。 イ 面積の単位（平方センチメートル）について知ること。 ウ 正方形及び長方形の面積の求め方を考え、それらを用いること。 (2) 角の大きさについて理解し、それを測定することができるようにする。 ア 角の大きさを回転の大きさとしてとらえ、その単位と測定の意味について理解すること。 イ 角の大きさの単位（度（°））について知ること。
	図形	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、図形の構成要素及びそれらの位置関係に着目し、図形についての理解を深める。 ア 直線の平行や垂直の関係について理解すること。 イ 平行四辺形、ひし形、台形について知ること。	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、基本的な図形についての理解を深める。 ア 図形を構成する要素に着目して、二等辺三角形、正三角形について知り、それらをかいたり、作ったり、平面上で敷き詰めたりすること。 イ 基本的な図形と関連して角について知ること。 ウ 円について中心、直径及び半径を知り、円をかいたり作ったりすること。また、円に関連して球についても直径などを知ること。
	算数的活動	イ 長方形を組み合わせた図形の面積の求め方を、具体物を用いたり、言葉、数、式、図を用いたりして考え、説明する活動 ウ 身の回りにあるものの面積を実際に測定する活動 エ 平行四辺形、ひし形、台形で平面を敷き詰めて、図形の性質を調べる活動	
第5学年	量と測定	(1) 図形の面積を計算によって求めることができるようにする。 ア 三角形、平行四辺形、ひし形及び台形の面積の求め方を考えること。	(1) 基本的な平面図形の面積が計算で求められることの理解を深め、面積を求めることができるようにする。 ア 三角形及び平行四辺形の面積の求め方を考え、それらを用いること。 イ 円の面積の求め方を考え、それらを用いること。
	図形	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、平面図形についての理解を深める。 ア 多角形や正多角形について知ること。 イ 図形の合同について理解すること。 ウ 図形の性質を見だし、それを用いて図形を調べたり構成したりすること。 エ 円周率について理解すること。	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、基本的な平面図形についての理解を一層深めるとともに、図形の構成要素及びそれらの位置関係に着目して考察できるようにする。 ア 直線の平行や垂直の関係について理解すること。 イ 平行四辺形、台形、ひし形について知り、それらをかいたり、作ったり、平面上で敷き詰めたりすること。 ウ 基本的な図形の簡単な性質を見だし、それを用いて図形を調べたり構成したりすること。 エ 円周率の意味について理解すること。
	算数的活動	イ 三角形、平行四辺形、ひし形及び台形の面積の求め方を、具体物を用いたり、言葉、数、式、図を用いたりして考え、説明する活動 ウ 合同な図形をかいたり、作ったりする活動 エ 三角形の三つの角の大きさの和が180度になることを帰納的に考え、説明する活動。四角形の四つの角の大きさの和が360度になることを演繹的に考え、説明する活動	内容の取扱い (4) 内容の「B量と測定」の(1)のイ及び「C図形」の(1)のエについては、円周率としては3.14を用いるが、目的に応じて3を用いて処理できるよう配慮するものとする。 (5) 内容の「C図形」の(1)のウについては、三角形など多角形の角の大きさの和について調べることなどを取り扱うものとする。
第6学年	量と測定	(1) 身の回りにある形について、その概形をとらえ、およその面積などを求めることができるようにする。 (2) 図形の面積を計算によって求めることができるようにする。 ア 円の面積の求め方を考えること。	(1) 身近にある図形について、その概形をとらえ、およその面積などを求めることができるようにする。
	図形	(1) 図形についての観察や構成などの活動を通して、平面図形についての理解を深める。 ア 縮図や拡大図について理解すること。 イ 対称な図形について理解すること。	(※ この学年では立体図形について取り扱われている。)
	算数的活動	ウ 身の回りから、縮図や拡大図、対称な図形を見付ける活動	

### (1) 第3学年までの内容について

学習指導要領（平成10年）の第3学年は「長方形」という用語が初めて登場してくる学年である。第2学年で4本の直線で囲まれている形と定義された四角形が、第3学年において形としての直角や、辺及び頂点が定義されて、長方形が「かどがみんな直角になっている四角形」と定義される。表1のとおり第3学年は「図形」領域において「図形を構成する要素に着目して、正方形、長方形、直角三角形について知り、それらをかいたり、作ったり、平面上で敷き詰めたりすること」とあるように、長方形を構成する要素に着目した図形認識の内容となっている。つまり、長方形の「周りの長さ」を求めるという「量と測定」領域の内容としては取り扱われてはいない。実際、教科書では、「2つの辺の長さが2cmと4cmの長方形を方眼紙にかきましょう」という課題は作図のために長さが与えられている。また、「長方形の向かい合う辺の長さを調べましょう」という課題では、向かい合う辺の相等関係を知るために長さを測るという内容となっている。ここでは、長さの測定が図形の性質の認識の手段となっており、図形の「周りの長さ」を求める測定そのものは第3学年においては主たる課題となっていない。「周りの長さ」という文言は学習指導要領の当該学年にはなく、教科書もそれに準じたものになっている。ただし、下学年の第2学年において普遍単位の導入に伴って、「簡単なものについて、長さの測定ができるようにする」とあることから、確認のために第2学年の当該年度の教科書を精査した。結果、そこには葉書などの「縦と横の長さ調べ」の記述は見られたが、図形の「まわりの長さ調べ」に関する記述は見られなかった。

### (2) 調査時の第4学年の内容について

さて、第3学年までをみてきたが、調査時の第4学年ではどうか。第4学年では「量と測定」領域において「正方形及び長方形の面積の求め方を考え、それらを用いること」とある。ここでは、「長さ」ではなく「面積」が主たる学習内容である。たとえば平成10年度版学習指導要領に準拠する教科書（啓林館2004, p84）には、方眼上に描かれた「まわりの長さが16」の四角形やL字型の図形について「まわりの長さが同じなら広さも同じかな？」という広さ調べの内容が「面積」の導入としてある。図形の「まわりの長さ」という言葉は、この発行者の第4学年教科書に初めて登場するが、周りの長さの測定ではなく、それを予め16と与えている図形の広さ調べなのである。（他の発行者の教科書にも、同様の内容がある。）このように周りの長さを一定にする意図は、縦横の長さが決まれば長方形は一意に決まるが、周りの長さによってはそうはならず、面積は必ずしも大小判断できないということの理解のためである。「必ずしも」と言ったのは、相似な図形同士の場合は周りの長さで大小判断が可能だからである。もし、同様の内容で相似な図形での広さ比べが繰り返されれば、「まわりの長さ」は「面積」との結びつきをいっそう強め、誤ったスキーマをつくる可能性を生む。以後、教科書では、上記の図形の広さ調べに普遍単位を導入して面積を定義し、長方形の面積公式を導く流れとなっている。

### (3) 「まわりの長さ」という用語

以上のことから、面積の導入から公式化までにおいて「まわりの長さ」という用語が結びつく知識構造は、面積についての知識構造であろうと容易に予想される。「まわりの長さ」とは、数学的には「周の長さ」という。「周」については『数学小辞典』（1968, p.228）において次のように説明されている。「長方形ABCDにおいては、線分AB, BC, CD, DAを合わせてその周といい、△ABCにおいては線分AB, BC, CAを合わせてその周という。円の周を特に円周という。」実は、学習指導要領（平成10年）のどの学年においても、「まわりの長さ」という用語は見当たらない。小学校では「まわり」という言葉は教科書に定義されないまま使用されている。児童の発達段階を考慮してのことである。しかし、校舎のまわり、池のまわり、木のまわり等と、「まわり」という言葉が日常語であるがゆえに、それが指し示す範囲において曖昧さが伴うことになる。さらに、図形の「まわりの長さ」は、調査時第4学年の児童にとっては、3の（1）・（2）で述べたように「長さ」の測定において用いる用語としては、なじみの少ないものだったのである。「長方形の周りの長さは小学校3年で履修」と調査報告書にあったが、その「履修」の中身は以上のように概観される。

また、同報告書の「長方形の面積と混同してしまいがちであるというわが国に特有の問題点」、つまり「長方形の周りの長さ」と長方形の面積との混同」とは、はたしてカリキュラム上の問題なのか、指導上の問題なのか。第3学年までに体制化された知識構造である長方形の縦横の長さの測定スキーマは、図形認識の手段として図形の構成要素間の関係の理解には寄与したかもしれない。しかし、「長方形のまわりの長さの測定」には結びつき難かったことを、調査問題の正答率33.7%は示している。その要因に迫るために、小学校における「長さ」の概念と「面積」の概念がどのように指導されているのか、次に見ることにする。

## 4 「長さ」や「面積」などの外延量の指導

### (1) 4つの指導段階

「長さ」という量は、「どちらが長いでしょう」という「長さくらべ」の学習活動のもと、「①直接比較」、「②間接比較」、「③任意単位による測定」、「④普遍単位による測定」の4段階を経て導入される。（文部省、1989, pp.41-42）、（文部科学省、2008, pp.44）

直接比較と間接比較では、具体的なものをを用いることで共通している。また、直接比較や間接比較は、量の差に着目することから、具体的なものの属性（長さや広さなど）のうち、比べようとしている量は何なのかが絶えず子どもには明確になるというよさがある。一方、任意単位と普遍単位の測定においては、単位尺度における「～のいくつ分」という数値化により量が演算の対象になり大小判断を明確化するというよさがある。

この4段階は、長さのほかに、面積や重さなどの「加法性のある量（外延量）」を認識させる指導段階でもある。学習指導要領（平成10年）及び教科書の内容から、算数科の授

業は、この段階の流れで進行しているものとする。「長さ」に関する指導学年は、表1のとおり第1学年に「長さを直接比べること」、「身近にあるものの長さを単位として、その幾つ分かで長さを比べること」とあるように、段階①から段階③までが第1学年であり、第2学年で「長さの単位mm、cm及びmについて知ること」、第3学年で「長さの単位kmについて知ること」とあるように段階④の「普遍単位による測定」は第2学年及び第3学年である。この「比較」から「測定」への4段階の流れは、「比べる」操作により量の意識化を迫り、「はかる」操作に単位を導入して数値化を可能にすることで、「比べる」操作と大小判断をより明確化させて測定の理解を深めていく流れともいえる。

## (2)「面積」の指導段階と長方形の面積の公式

「面積」についても前述の4段階を踏み、図形の広さ比べによる広い・狭いという感覚的な広さの理解から面積の概念へと抽象化していく。まず、図形同士を重ね合わせてできるはみ出した部分を直接比較したり、移動できない図形などは紙等に輪郭を写し取って同様に比較したりする。次に、正方形などを任意単位として図形内に隙間なく敷き詰めて、任意単位のいくつ分になっているかで大小判断する。最後には1辺1cmの正方形を単位として長方形に敷き詰められる個数をもって面積を定義し、長方形の内部にその正方形を隙間なく敷き詰められた個数が、長方形の縦に並ぶ正方形の個数と横に並ぶ正方形の個数の積により求まることを知る。その際、長方形の縦横にならぶ正方形の個数は長方形の縦横の長さの数と一致することから、「長方形の面積＝縦×横」という公式が導かれるという流れ(図2)である。

この流れを調査問題の縦3cm、横7cmの長方形で説明する。この長方形の面積は、1辺が1cmの正方形を単位図形とすれば、その個数は縦に3個、横に7個並ぶ。並んだそれぞれの正方形の1辺が単位の長さ1cmであるから縦に1cmの3つ分で3cm、横に1cmの7つ分で7cmとなる。ここで、縦に並ぶ3個と縦の長さ3cmはともに数が3、横に並ぶ7個と横の長さ7cmはともに数が7であることから、辺に添って並ぶ単位正方形の数と辺の長さの数が一致することがわかる。したがって、長方形の内部に敷き詰められた単位正方形の総数は、3(個)×7(個)で求まるが、縦横の個数と縦横の長さの数の一致により3(cm)×7(cm)で面積が長さの積で求まるということである。簡潔に言えば、縦横の単位面積の図形の数と単位の長さの数の一致が面積の公式化を可能にしているということである。

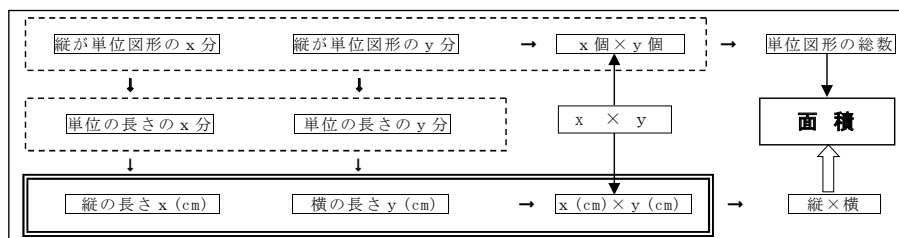


図2 長方形の面積の公式化の流れ



## 5 図形の外延量の測定の問題解決に寄与する2つのスキーマ

### (1) 長さの知識構造と面積の知識構造を統合する知識

長方形の面積は、直接測定ではなく、図形を構成する要素である辺の長さから求積される間接測定であった。ここで重要なのは、4段階を踏んで形成される面積の大きさの概念が単位量を定めることによって、そのいくつ分になっているかを調べることで数値化できるという数学的なアイデア（知識）である。これは、長さの概念形成においても共通するアイデア（知識）である。したがって、子どもが自ら形成していく長さの知識構造と面積の知識構造は、この点において統合可能なのである。

磯田正美は、「～のいくつ分」という累加（＝倍）のアイデアが、乗法の考え方や比例の考え方を育む際の素地となると、その重要性と展望を強調している。（1994, pp.195-196）

測定したい図形の量Aを、それに関連する図形の構成要素の量の測定値BによってAの測定を可能にするのが、「～のいくつ分」（倍概念）の考え方にほかならない。それは、例えば半径又は直径の長さの測定値による円周の長さの測定や、円の区分求積においてその半径の長さが縦の長さ、円周の半分の長さが横の長さと等しくなる長方形に近似させていく測定などにも発展的に関連づいていく考え方なのである。

### (2) 任意単位測定スキーマと普遍単位測定スキーマ

稿者は、先の4段階の学習をもとに形成される「外延量」の測定の問題解決に特に寄与するスキーマが2つあると考えている。それらは、図形の構成要素及びそれらの相互関係や位置関係等の知識構造内に体制化するスキーマであり、その後の学習に対して長期的な展望を与える。一つ目は、段階の①から③において体制化される知識構造である「任意単位測定スキーマ」である。二つ目は、段階の④と立式において体制化される知識構造である「普遍単位測定スキーマ」である。前者は図2の点線の四角囲みのように、比較可能な適当な量を任意単位として「そのいくつ分」という倍概念の考え方に立脚した測定スキーマである。そのスキーマの変数は「比較する対象」、「比較する量」、「用いる任意単位」である。後者は図2の二重線の四角囲みのように、普遍単位の測定における図形の量的関係の立式に関与する測定スキーマである。そのスキーマの変数は、「測定する対象」、「測定する量」、「用いる普遍単位」である。2つのスキーマの決定的な違いは、「任意単位」と「普遍単位」という変数の違いであり、「～のいくつ分」という倍概念の思考方法と図形の量的関係の立式における思考方法との違いである。図形の構成要素の関係を量的関係で捉えて考察する際に、これら2つのスキーマの協働化をいかに図るかが、測定の問題解決の要だと考える。4段階の流れから理論上、2つのスキーマには相補性があり、繋がり合う知識構造として体制化が可能である。しかしながら、これらのスキーマは子どもが学習経験を重ねて、その内に形成していくものであるため、誤ったスキーマによって取り違えや間違いも生じるのである。次は、その誤ったスキーマが生まれるメカニズム、また、そのスキーマの修正について述べる。

## 6 誤ったスキーマの形成と修正

### (1) 誤ったスキーマが生まれるメカニズム

子どもは長方形の周りの長さをなぜ縦と横の積としたのか。53.9%のこの誤答率の背後には、長さの知識構造と面積の知識構造の結びつきの誤ったスキーマが横たわっている。そもそも、長方形の周りの長さの測定には、先の2つのスキーマが協働する次のプロセスが必要である。

- ① 図の長方形において「周りの長さ」とはどこの長さかがわかる。
- ② 長方形の性質「向かい合う辺の長さが等しいこと」を図の長方形に適用できる。
- ③ ②より長方形の周が縦横の長さの2つ分であることや、長方形の周が縦の辺2つと横の辺2つの要素で構成されていることなど、構成要素間の量的関係がわかる。
- ④ ③の構成要素間の量的関係を長方形の周りの長さに関連付けた式に構成できる。
- ⑤ ④で立式された式を計算して測定値を求めることができる。

誤答であった児童の多くは、特に③の段階の無い誤ったスキーマに依存していると考えられる。第3学年で初めて定義される長方形は、測定対象ではなく図形理解の対象であった。調査時の第4学年では、長方形は主として求積の対象となる。「任意単位測定スキーマ」及び「普遍単位測定スキーマ」という2つのスキーマは、大小判断の場合においては単独でも結果に寄与できる。しかし、第4学年での「長方形の面積」の学習において、縦横の長さの数値から公式による求積が可能になることから「普遍単位測定スキーマ」のみで対処できることになる。そこで、次の二点が予想される。

ア 任意単位測定スキーマに依拠することなく結果を出せる経験を重ねた場合、長方形の面積公式による演算処理を代表とする普遍単位測定スキーマが「求積」で依拠する知識構造として支配的になるということ。

イ 第4学年の教科書における図形の「まわりの長さ」と「面積」の大小判断の取り扱いにより、「まわりの長さ」と「面積」との繋がりが強化するということ。(図形の周りの長さがその面積の大小判断には必ずしも寄与しないことは、3の(2)で述べたとおりである。)

この状況下における誤答の背後に横たわる誤ったスキーマの様相とはどのようなものであろうか。その点については、今井むつみ(2016, p.91)の次の説明がわかりやすい。

「スキーマが誤ったものであると、何が起こるか。問題解決に必要な情報に目が行かず、関係のない情報にばかり注目してしまう。スキーマに合うように情報(あるいは学習すべきテキストの内容)を理解してしまい、それを記憶してしまう。その結果、誤った思い込み知識(誤認識)は、修正されどころか、強化されてしまう。そういうことが繰り返されるので、誤ったスキーマの修正は難しいのである」

したがって、上記のア・イの状況により、長方形の縦横の長さの情報は、その「まわりの長さ」との結びつきよりも、面積の公式と結びつきを強くしながら「普遍単位測定スキーマ」内に階層化する「長方形→縦と横の長さ→掛け算」という一連の知識構造を活性化さ

せ、演算処理を促すようになる。そして、同様の演算処理の繰り返しにより、ついには、その一連の知識構造はパターン化し、独立的に機能する誤ったスキーマとなる。すなわち、この誤ったスキーマにより、たとえ「まわりの長さ」が問われていたとしても、それには目が行かず、縦と横の情報が与えられると、誤ったスキーマに合うようにその情報を理解して乗法の演算処理に向かわせようとするのである。スケンプ（1973, p.41）は「だから、初期段階における先生の責任は大きい。教師は、数学記号の操作の棒暗記ではなくて、シエマによる学習が起こっているという確信を持たねばならない」という。

## （２）誤ったスキーマが修正されるとき

任意単位測定スキーマが先の調査問題において機能していればどうだろう。このスキーマが機能すれば、既に与えられた「縦横の長さ」のある２つの「辺」と、求めなければならない長方形の「周りの長さ」のある「周」との比較に入る。次に、任意単位を設定して「～のいくつ分」の思考方法を心的用具として用いる。例えば、長方形の「数値が与えられた縦横合わせた２つ分が周りの長さになっている」とか、「縦２つ分と横２つ分が周りの長さになる」などの「～のいくつ分」の考えで比較から計算可能な測定へ、つまり「普遍単位測定スキーマ」との協働への道をたどれることになる。本稿の３の（３）において、縦横の長さの測定スキーマが、「長方形のまわりの長さの測定」には結びつき難かったと指摘した。その要因は、結局のところ「任意単位測定スキーマ」と「普遍単位測定スキーマ」との協働と形成の問題にある。では、形成されてしまった誤ったスキーマはどうすれば修正できるのか。誤ったスキーマの修正は難しいと述べた今井（2016, pp.220-221）は、「これまでの自分の理解のしかたが、いま観察している現象と矛盾していることに自分で気がつかなければ、誤ったスキーマは修正されない。（中略）子どもが自分のスキーマがおかしいことに気づく状況を設定する」ことが教師の役目であると述べている。たとえば、次のような例が考えられる。

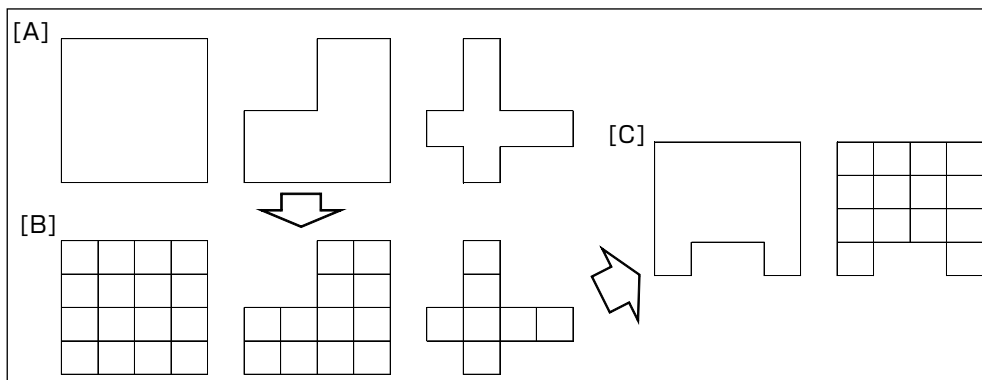


図３ スキーマの修正を促す例

上の図３のように、正方形と正方形を縦横に沿って切った図形を考える。まず、[A]

において図形の周りの長さ比べをする。直観的に3つの図形の周りの長さは異なっていると考える子どもがいるだろう。彼らは、[B]における任意単位スキーマにより図形の周りの長さがどれも同じであることに気づき、自らの理解の仕方の修正に向かう。そこで、「正方形をどのように切っても、その図形の周りの長さは変わらない」と誤ったスキーマを形成した子どもは、[C]の左の図形と正方形の周りの長さ比べにおいても、誤ったスキーマに依拠しようとするであろう。しかし、[C]の右の図形における任意単位スキーマにより、その誤ったスキーマに修正が促される。このように、認識と現象の矛盾に子どもが自ら気づき、誤ったスキーマの修正が促されるシチュエーション、また、間接比較や実測も併用して普遍単位測定スキーマと任意単位スキーマのよさが実感できるシチュエーションの設定が指導者には求められる。

## 7 2つのスキーマの協働と形成を促すために

### (1)「わが国特有の問題点」と学習指導要領の改訂

TIMSS2007調査報告書は「わが国特有の問題点」として「長方形の周りの長さと長方形の面積との混同」を指摘した。それを受けてか、現行の学習指導要領（平成20年）の改訂では、「領域間の指導の関連」を学習指導に求めて、表1のとおり第3学年の図形領域にあった長方形などの図形の内容が、普遍単位を用いた長さの測定を学ぶ第2学年へと移行された。しかし、学習指導要領を基準に編成されるカリキュラム上の学年移行が、指導方法の改善につながったかといえば疑問が残る。なぜなら、この問題は、学習内容の学年配置の問題というより、前述の2つのスキーマの協働と形成という学習指導上の問題だからである。

今回の学習指導要領（平成29年）の改訂では、どうだろうか。長方形関連の内容の学年移行はないが、領域の改編が行われた。その特徴は、「ものの属性に着目し、単位を設定して量を数値化して捉える過程を重視し、それぞれの量について、そこでの測定のプロセスに焦点を当てて学ぶ」ために下学年に「測定」領域を設定したことであり、基本的な図形の求積の学習を、「図形の特徴を計量的に捉えて考察するという視点」で位置付け、上学年における「図形」領域の内容に移行したことである。（文部科学省、2017、pp.39-40）

この改訂においても外延量の4段階の指導は踏襲されている。また、本稿の3で見たような長方形の性質と測定との領域分離の配置から同一領域内の取扱いとなったことで、従来領域外であった知識同士の協働を容易にする環境は上学年においては整ったといえる。ただし、図形の特徴を計量的に捉えて考察する素地づくりとして、下学年の特に第3学年の指導は重要だと考える。いずれにしても、図形の構成要素及びそれらの相互関係等の知識構造内に体制化する2つのスキーマの協働と形成を促す学習指導が一層求められる。そこで、それらの協働と形成を促す学習課題づくりの視点の提案をもって結語に代えることにする。

## (2) 2つのスキーマの協働と形成を促す学習課題づくりの視点

下の図4は、「任意単位測定スキーマ」と「普遍単位測定スキーマ」の協働及び形成を促すための課題の図であり、右の表2は課題における図形の対応関係及び対象学年を示す。

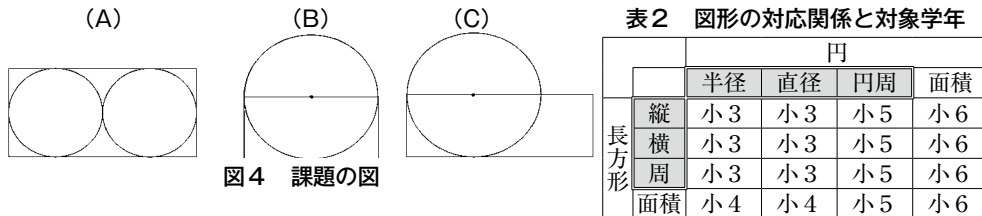


表2の長方形の属性（左縦列）から円の属性（上横列）の測定やその逆の測定など図形の特徴を計量的に捉えて考察する多様な課題が図4の各図形において考案できる。また、表2の二重枠相互間では伴って変わる量（小5）や比例（小6）の内容に発展する課題も考案できる。当然のことであるが、算数科の内容となるよう、与える測定値等の条件の工夫は必要である。

次に課題例により説明する。（表2は、現行及び新学習指導要領を想定している。）

- 【課題1】(A)の図のように、長方形の中に同じ大きさの2つの円がぴったり入っています。円の半径が3cmのとき、長方形のまわりの長さを求めなさい。
- 【課題2】(B)の図のように、円の半分が長方形の中に入っています。円内の点は円の中心であり、長方形の横の長さは円の直径の長さと等しくなっています。直径の長さが10cmのとき、長方形のまわりの長さと円周の長さはどちらが長いですか。
- 【課題3】(C)の図のように、円の半分が長方形の中に入っています。円の半径は5cmで円内の点は円の中心です。円周の長さと長方形のまわりの長さが等しいとき、長方形の面積を求めなさい。

課題1は、直径又は半径の長さのいくつ分が長方形の周りの長さとなっているかを、直径と半径との関係から測定するものである。対象学年は、問題文で扱っている円の属性「半径」と長方形の属性「周」が表2において交差する個所にある「小3」である。なお、長方形の面積を求めるのであれば対象学年は「小4」になり、2円の円周の和と長方形の周との大小比較をするのであれば対象学年は「小5」になる。

課題2は、直径10cmが与えられているので普遍単位測定スキーマにより計算による測定値で大小判断ができるが、任意単位測定スキーマにより長方形の周りの長さが「直径の3つ分（＝3倍）」、「円周は直径の3.14倍」であることから容易に判断できる。2つのスキーマのよさの吟味が後のスキーマの協働と形成を促すことになる。対象学年は「小5」である。

課題3は、半径と直径、直径と円周、長方形の周と長方形の対辺について図形の特徴を計量的に捉えて考察する課題であり、2つのスキーマの協働により測定が効率化する。長方形の周りの長さを併せて問うこともできる。対象学年は「小5」である。また、この課題は円の面積と長方形の面積が等しい場合を設定すれば、本稿の5で述べた円の区分求積

の考え方の「小6」の課題となる。

以上、2つスキーマの協働及び形成を促すと考えられる学習課題づくりの視点を提案した。課題の対象学年を示してはいるが子どもの現有するスキーマを踏まえた課題なのか、また、その課題が子どものスキーマの形成又は修正を明確に意図したものなのかの問い直しの必要性を強調しておきたい。今後は、実際の算数科の授業を通して、提案した視点の有効性を検証し、「わが国特有の問題」（長方形の周りの長さと同様の面積との混同）の解決にいくばくか資することができればと思う。

#### 【引用・参考文献】

- 小川和夫監修（1987）：社会心理学用語辞典 北大路書房 pp.109-110
- 日本数学教育学会（2006）：算数教育指導用語辞典 p.29
- 平林一榮（1987）：数学教育の活動主義的展開 東洋館出版社 p.322, p.345
- スケンプ, R.R. (1973)：数学学習の心理学（藤永保・銀林浩訳）新曜社 p.28, p.41
- 国立教育政策研究所（2009）：TIMSS2007算数・数学教育の国際比較－国際数学・理科教育動向調査の2007年調査報告書－平成21年8月（改訂版）p.53, : 国立教育研究所HP<[http://www.nier.go.jp/timss/2007/report\\_math.pdf](http://www.nier.go.jp/timss/2007/report_math.pdf)>（2018.10.1閲覧）
- 文部省（1989）：小学校指導書 算数編 東洋館出版社 pp.41-42
- 文部科学省（2008）：小学校学習指導要領解説算数編 東洋館出版社 p.44
- 啓林館（2004）：わくわく算数4上 p.84
- 矢野健太郎編（1968）：数学小辞典 共立出版 p.228
- 磯田正美（1994）：「長さの指導のポイント」, CRECER中学校数学科実践講座7 ニチブン pp.195-196
- 今井むつみ（2016）：学びとは何か 岩波新書 p.91, pp.220-221
- 文部科学省（2017）：小学校学習指導要領解説算数編 pp.39-40：文部科学省HP<[http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_\\_icsFiles/afieldfile/2018/05/07/1387017\\_4\\_1\\_2.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/05/07/1387017_4_1_2.pdf)>（2018.10.1閲覧）